5. Μέθοδοι αναγνώρισης – εκπαίδευση χωρίς επόπτη

Το πρόβλημα του προσδιορισμού των συγκεντρώσεων των προτύπων, όταν δεν είναι γνωστό το πλήθος τους και η ταυτότητα των προτύπων, είναι δύσκολο και για την λύση του προτείνονται ενδιαφέρουσες αλλά και πολύπλοκες τεχνικές. Η μέτρηση πολλών χαρακτηριστικών και η ποικιλία των προτύπων είναι βασικοί παράγοντες που επιτείνουν την δυσκολία του προβλήματος. Ακολούθως θα παρουσιάσουμε τρεις μεθόδους εκπαίδευσης χωρίς επόπτη. Οι δύο πρώτες είναι απλές διαδικασίες που μπορούν να δρομολογηθούν για την επίλυση απλών προβλημάτων μικρού μεγέθους δεδομένων. Η τρίτη είναι μία ισχυρή μέθοδος που βασίζεται στην λειτουργία ενός νευρωνικού δικτύου. Η δεύτερη και τρίτη μέθοδος δίνουν την δυνατότητα εποπτείας σε πολυδιάστατους χώρους που η αναπαράστασή τους σε ένα σύστημα αξόνων είναι ανέφικτη.

5.1. Προσδιορισμός των συγκεντρώσεων με την μέθοδο MAXIMIN

Πρόκειται για μία μέθοδο προσδιορισμού του πλήθους και του περιεχομένου των συγκεντρώσεων των προτύπων, επονομαζόμενη μέθοδος *MAXIMIN* και βασίζεται στην χρήση των αποστάσεων μεταξύ των προτύπων. Η μέθοδος έχει ως εξής:

Θεωρούμε K ($K \in N$) το πλήθος των προτύπων Π_κ, $\kappa=1,\ldots,K$, του συνόλου εκπαίδευσης S και $\mathbf{x}_\kappa$ τον πίνακα του προτύπου Π_κ. Θεωρούμε τον μετρητή κλάσεων t ($t \in N$) με αρχική τιμή ένα ($t = 1$).

Βήμα 1°: Επιλέγουμε ένα τυχαίο πρότυπο $\Pi_{\tau_t} = \Pi_{\tau_1}$ ($\tau_t=1,\ldots,K$) και με αυτό ορίζουμε την πρώτη κλάση $\omega_t=\omega_1$.

Βήμα 2°: Δημιουργούμε το σύνολο D_1 των αποστάσεων των προτύπων του S από το Π_{τ_1}

$$(5.1.1) \quad D_1 = \left\{ \left| x_{\tau_1} - x_{\kappa} \right| / \Pi_{\kappa} \in S \right\}$$

Βρίσκουμε το πρότυπο Π_{τ_2} (τ_2=1,…,K) που απέχει την μέγιστη απόσταση M_1 από το Π_{τ_1}.

$$(5.1.2) \quad \tau_2 = \max_{\kappa}(D_1)$$

$$(5.1.3) \quad D_1 = \left| x_{\tau_1} - x_{\tau_2} \right| = \max(D_1)$$

Βήμα 3°: Αυξάνουμε το t κατά ένα και ορίζουμε την κλάση ω_t με στοιχείο το Π_{τ_t}, $\omega_t = \{\Pi_{\tau_t}\}$.

Βήμα 4°: Ταξινομούμε κάθε $\Pi_{\kappa} \in S$ στις τάξεις ω_i, I=1,…,t με το κριτήριο της ελάχιστης απόστασης. Δημιουργούμε τα σύνολα D_i των αποστάσεων των προτύπων κάθε κλάσης ω_i από το πρότυπο Π_{τ_i} που όρισε την κλάση.

$$(5.1.4) \quad D_i = \left\{ \left| x_{\tau_i} - x_{\kappa} \right| / \Pi_{\kappa} \in \omega_i, i = 1,...,K \right\}$$

Βρίσκουμε την μέγιστη απόσταση M_t μεταξύ όλων των αποστάσεων των D_i και το αντίστοιχο πρότυπο Π_{κ} το οποίο ονομάζουμε $\Pi_{\tau_{t+1}}$.

$$(5.1.5) \quad \tau_{t+1} = \max_{\kappa}\left(\bigcup_{i=1}^{t} D_i \right)$$

$$(5.1.6) \quad M_t = \max\left(\bigcup_{i=1}^{t} D_i \right)$$

Βήμα 5°: Αν $M_t / M_{t+1} \leq \rho << 1$, όπου ρ θετικός προκαθορισμένος αριθμός σημαντικά μικρότερος της μονάδας, η διαδικασία σταματάει και το πλήθος των ομάδων είναι ο αριθμός t. Αλλιώς συνεχίζεται επαναληπτικά από το βήμα 3.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ MAXIMIN

Δίνονται οι παρακάτω πίνακες προτύπων:

(5.1.7) $\mathbf{x}_1 = [10, 8]^T$, $\mathbf{x}_2 = [9, 7]^T$, $\mathbf{x}_3 = [1, 10]^T$, $\mathbf{x}_4 = [2, 8]^T$, $\mathbf{x}_5 = [4, 1]^T$,

$\mathbf{x}_6 = [8, 9]^T$

Στο ρ δίνεται ι τιμή 0.4 (ρ=0.4) προς χάριν του παραδείγματος διότι στις πραγματικές εφαρμογές χρησιμοποιείται μικρότερη τιμή. Για απλούστευση της διαδικασίας υπολογίζουμε όλες τις αποστάσεις (π.χ. Ευκλείδειες) $d_{\kappa\lambda}$, κ,λ $\in$ {1,2,3,4,5,6,} μεταξύ των προτύπων. Δεδομένου ότι $d_{\kappa\lambda} = d_{\lambda\kappa}$ και $d_{\kappa\kappa}=0$ πρέπει να υπολογίσουμε για πλήθος προτύπων K = 6, K(K-1)/2=15 αποστάσεις. Οι τιμές των αποστάσεων δίνονται από τον Πίν. 5.1-1:

$d_{12}=\sqrt{2}=$ $[(10-9)^2+(8-7)^2]^{1/2}$	$d_{13}=\sqrt{85}$	$d_{14}=\sqrt{64}$	$d_{15}=\sqrt{85}$	$d_{16}=\sqrt{5}$
	$d_{23}=\sqrt{73}$	$d_{24}=\sqrt{50}$	$d_{25}=\sqrt{61}$	$d_{26}=\sqrt{5}$
		$d_{34}=\sqrt{5}$	$d_{35}=\sqrt{90}$	$d_{36}=\sqrt{50}$
			$d_{45}=\sqrt{53}$	$d_{46}=\sqrt{37}$
				$d_{56}=\sqrt{80}$

Πίνακας 5.1-1

- Το πλήθος προτύπων K=6 και ο μετρητής συγκεντρώσεων t=1.
- Επιλέγουμε τυχαία το πρότυπο Π_4, άρα $\tau_1=4$ και $\omega_1=\{\Pi_4\}$.
- $D_1 = \{d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{44}, d_{45}, d_{46}\} = \{\sqrt{64}, \sqrt{50}, \sqrt{5}, 0, \sqrt{53}, \sqrt{37}\}$

  $M_1 = \max(D_1) = \sqrt{64} = 8$, άρα $\tau_2 = 1$.
- $t = 2$, $\omega_2 = \{\Pi_1\}$.

- Όλα τα πρότυπα ταξινομούνται στις κλάσεις ω_1, ω_2 με βάση το κριτήριο της ελάχιστης απόστασης από τα Π_4 και Π_1. Για διευκόλυνση δημιουργούμε τον ακόλουθο πίνακα.

	Π_2	Π_3	Π_5	Π_6
$\Pi_4 \in \omega_1$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{53}$	$\sqrt{37}$
$\Pi_1 \in \omega_2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{5}$
	$\Pi_2 \in \omega_2$	$\Pi_3 \in \omega_1$	$\Pi_5 \in \omega_1$	$\Pi_6 \in \omega_2$

Πίνακας 5.1-2

Άρα $\omega_1=\{\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5\}$, $\omega_2=\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_6\}$

$$M_2 = \max(\{d_{43}, d_{45}\} \cup \{d_{12}, d_{16}\}) = \max\{\sqrt{5}, \sqrt{53}, \sqrt{2}, \sqrt{5},\} = \sqrt{53} = d_{45} \Rightarrow \tau_3 = 5$$

- $M_2/M_1 = \sqrt{53}/\sqrt{64} > p$ και συνεχίζουμε από το βήμα 3.
- $t = 3,\ \omega_3 = \{\Pi_{\tau_3}\} = \{\Pi_5\}$
- Τα πρότυπα ταξινομούνται στις κλάσεις ω_1, ω_2, ω_3 όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

	Π_2	Π_3	Π_6
$\Pi_4 \in \omega_1$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{37}$
$\Pi_1 \in \omega_2$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{85}$	$\sqrt{5}$
$\Pi_5 \in \omega_3$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{90}$	$\sqrt{80}$
	$\Pi_2 \in \omega_2$	$\Pi_3 \in \omega_1$	$\Pi_6 \in \omega_2$

Πίνακας 5.1-3

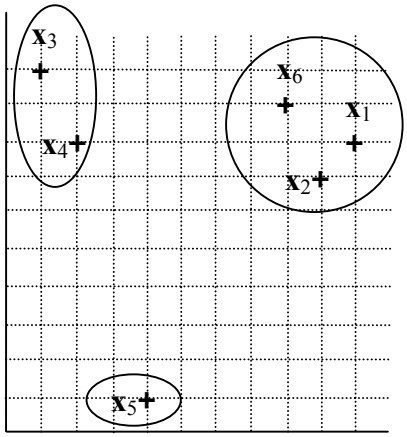
Οι κλάσεις διαμορφώνονται ως εξής:

$\omega_1=\{\Pi_3, \Pi_4\}$, $\omega_2=\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_6\}$, $\omega_3=\{\Pi_5\}$.

$$M_3 = \max(\{d_{43}\} \cup \{d_{12}, d_{16}\} \cup \varnothing) = \max(\{\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}) = \sqrt{5} = d_{43} = d_{16}$$

άρα $\tau_4 = 3$ ή 6.

- $M_3/M_2 = \sqrt{5}/\sqrt{53} = 0.307 < \rho$ συνθήκη που οδηγεί στον τερματισμό της διαδικασίας και στο αποτέλεσμα των τριών κλάσεων ω_1, ω_2 ,ω_3. Στο Σχ. 5.1--1 απεικονίζονται τα άκρα των ανυσμάτων των προτύπων, ο οπτικός προσδιορισμός των συγκεντρώσεων συμφωνεί με τα αποτελέσματα της διαδικασίας.



Σχήμα 5.1-1

5.2. Απεικόνιση αλυσίδας

Η *απεικόνιση αλυσίδας* (*chain map*) είναι μία μέθοδος που παρέχει την εποπτεία της κατανομής των προτύπων σε πολυδιάστατους χώρους και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του πλήθους και του περιεχομένου των συγκεντρώσεων τους. Σύμφωνα με αυτήν δημιουργούμε μία κατανομή της απόστασης κάθε προτύπου με το γειτονικότερό του. Συγκεκριμένα διατρέχουμε όλα τα πρότυπα ξεκινώντας από κάποιο τυχαίο μεταβαίνοντας στο γειτονικότερό του εξαιρουμένου του προηγουμένου του. Θεωρούμε έναν δείκτη i, $i \in N$, που αριθμεί τις μεταβάσεις από πρότυπο σε πρότυπο αυξανόμενος κατά ένα ξεκινώντας με αρχική τιμή την μονάδα που αντιστοιχεί στην απόσταση του αρχικού τυχαίου προτύπου με το γειτονικότερό του. Δημιουργούμε την ακολουθία α_i των αποστάσεων των προτύπων. Οι κορυφές

της κατανομής που περιγράφει η ακολουθία α_i, διαχωρίζουν το σύνολο των προτύπων σε υποσύνολα που καθορίζουν τις συγκεντρώσεις τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω τα πρότυπα

$\mathbf{x}_1 = [10, 8]^T$, $\mathbf{x}_2 = [9, 7]^T$, $\mathbf{x}_3 = [1, 10]^T$, $\mathbf{x}_4 = [2, 8]^T$, $\mathbf{x}_5 = [4, 1]^T$, $\mathbf{x}_6 = [8, 9]^T$

που χρησιμοποιήσαμε και στο παράδειγμα της μεθόδου MAXIMIN.

- Επιλέγουμε τυχαία το πρότυπο Π_4 και θέτουμε i=1. Υπολογίζουμε τις αποστάσεις των υπολοίπων προτύπων (δίνονται στον Πίν. 1) και υπολογίζουμε την μικρότερή τους.

  $\min\{d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{45}, d_{46}\} = \min\{\sqrt{64}, \sqrt{50}, \sqrt{5}, \sqrt{53}, \sqrt{37}\} = \sqrt{5} = \alpha_1$

  άρα γειρονικότερο του Π_4 είναι το πρότυπο Π_3.

- Υπολογίζουμε τις αποστάσεις των προτύπων πλην του Π_4, από το Π_3 και βρίσκουμε την μικρότερή τους

  $\min\{d_{31}, d_{32}, d_{35}, d_{36}\} = \{\sqrt{85}, \sqrt{73}, \sqrt{90}, \sqrt{50}\} = \sqrt{50} = \alpha_2$

  και μεταβαίνουμε στο Π_6.

- $\min\{d_{61}, d_{62}, d_{65}\} = \{\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{32}\} = \sqrt{5} = \alpha_3$

  και μεταβαίνουμε στο Π_2.

- $\min\{d_{21}, d_{25}\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{61}\} = \sqrt{2} = \alpha_4$

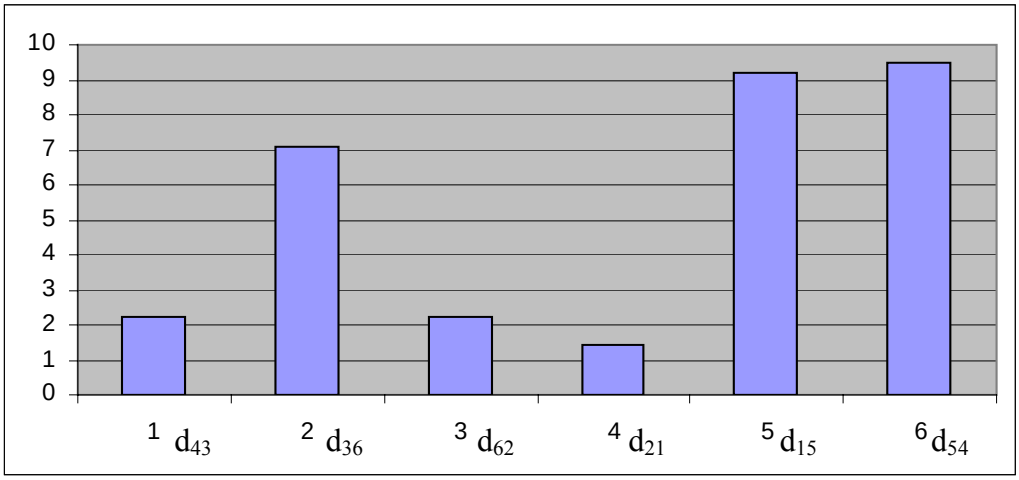
  και μεταβαίνουμε στο Π_1.

- $d_{15} = \sqrt{85} = \alpha_5$.

- $d_{54} = \sqrt{90} = \alpha_6$.

Οι τιμές της ακολουθίας α_i, i=1,...,6 φαίνονται στο Σχ.5.2-1.

Οι υψηλές τιμές ορίζουν τις ομάδες χαμηλών τιμών α) d_{43}, β) d_{62}, d_{21}. Από την πρώτη συμπαιρένεται ότι $\omega_1=\{\Pi_3, \Pi_4\}$, από τήν δεύτερη $\omega_2=\{\Pi_6, \Pi_2, \Pi_1\}$. Το απομένον $\Pi_5 \in \omega_3$.



Σχήμα 5.2-1