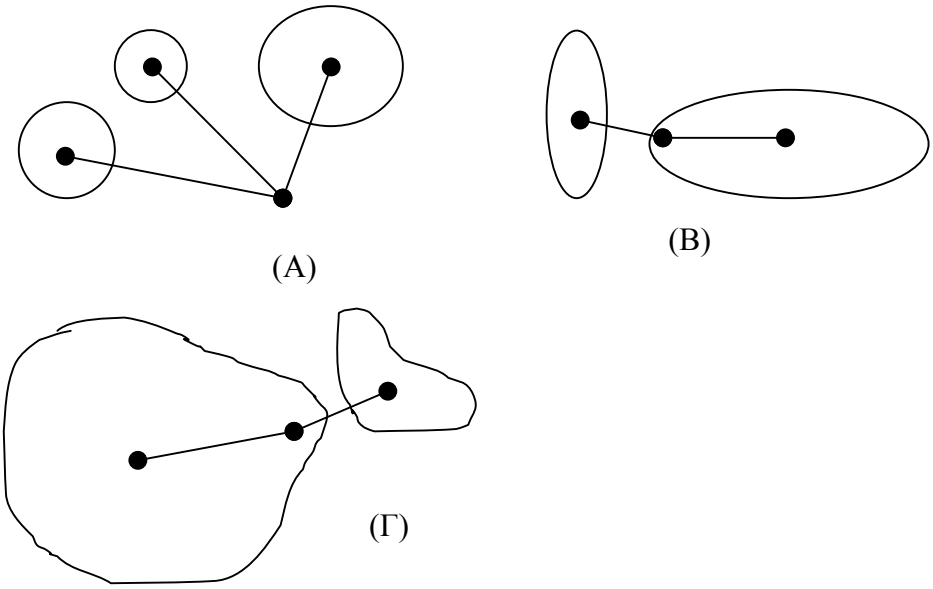
4. Μέθοδοι αναγνώρισης – ταξινομητές με επόπτη

4.1. Αναγνώριση με βάση τα κέντρα των τάξεων

Είναι μια απλοϊκή μέθοδος αναγνώρισης με επόπτη σύμφωνα με την οποία κατά την εκμάθηση υπολογίζεται η μέση τιμή της κάθε κλάσης (κέντρο της κλάσης). Κάθε νέο πρότυπο ταξινομείται στην κλάση που το κέντρο της απέχει λιγότερο από το πρότυπο. Αν T το πλήθος των τάξεων με κέντρα μ^t, t=1,2,…,T το πρότυπο με πίνακα **x** αποδίδεται στην κλάση $\min_t(d(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}^t))$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι αποδοτική όταν οι κλάσεις έχουν τη μορφή υπερσφαιρών με ακτίνες μικρότερες της ημιαπόστασης των κέντρων τους.



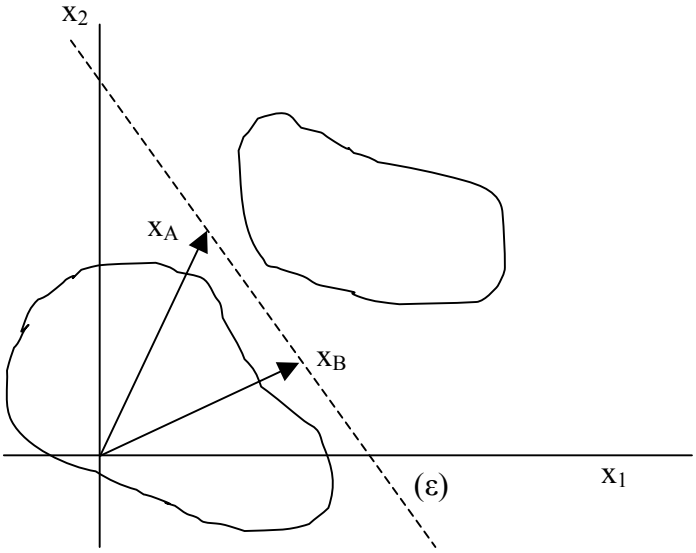
Σχ. 4.1-1 Α) Ορθή ταξινόμηση.
Β) Εσφαλμένη ταξινόμηση λόγω διαφορετικής συμμεταβλητότητας των κλάσεων. Συνιστάται η χρήση απόστασης Mahalanobis.
Γ) Εσφαλμένη ταξινόμηση λόγω μορφολογίας των κλάσεων.

4.2. Αναγνώριση με γραμμικές διακριτικές συναρτήσεις

Η ευθεία (ε) του σχήματος 4 χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα κάθε ένα των οποίων περιέχει και μια κλάση. Κάθε σημείο της ευθείας είναι το πέρας ενός διανύσματος $\vec{\mathbf{x}}(x_1, x_2)$ που ικανοποιεί την εξίσωση της ευθείας που είναι

(4.2.1) $w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 = 0$ ή

(4.2.2) $d(\mathbf{x}) = 0$ όπου $d(x) = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3$ και $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$

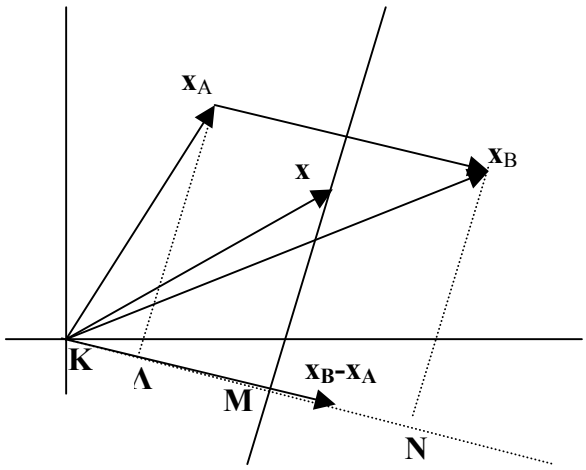


Σχήμα 4.2-1

Εύκολα αποδεικνύεται (Παρ. Α) ότι τα σημεία του ενός ημιεπιπέδου καθιστούν την $d(\mathbf{x})>0$ και του άλλου ημιεπιπέδου την $d(\mathbf{x})<0$. Η συνάρτηση $d(\mathbf{x})$ λέγεται *γραμμική διακριτή συνάρτηση* και η ταξινόμηση ενός προτύπου που περιγράφεται από τον πίνακα στήλης **x** εξαρτάται από τις σχέσεις $d(\mathbf{x})<0$ ή $d(\mathbf{x})>0$. Αν $d(\mathbf{x})>0$ ανήκει στην πρώτη κλάση, αν $d(\mathbf{x})<0$ στη δεύτερη και αν $d(\mathbf{x})=0$ υπάρχει απροσδιοριστία. Η σχέση $d(\mathbf{x})=w_1x_1+w_2x_2+w_3$ γράφεται με την βοήθεια πινάκων

(4.2.3) $d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_3$, $\mathbf{w} = [w_1, w_2]^T$.

Αν τα άκρα των $\mathbf{x}_A$ και $\mathbf{x}_B$ ανήκουν στην ευθεία τότε προφανώς ισχύει ότι $\mathbf{w}^T(\mathbf{x}_A-\mathbf{x}_B)=0$ που σημαίνει ότι το άνυσμα **w** είναι κάθετο στην ευθεία. Κατά την εκπαίδευση πρέπει από το σύνολο εκπαίδευσης να προσδιορισθούν οι συντελεστές w_1, w_2 , w_3 της ευθείας (ε). Αν $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$ οι πίνακες των κοντινότερων σημείων (προτύπων) δύο κλάσεων Α και Β, Σχ.4.2-1, τότε μία ευθεία κατάλληλη για τον καθορισμό των ημιεπιπέδων των κλάσεων είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα άκρα των διανυσμάτων $\vec{x}_A$ και $\vec{x}_B$.



Σχήμα 4.2-2

Η προβολή κάθε ανύσματος $\vec{x}$ που το άκρο του ανήκει στην (ε) είναι η αλγεβρική τιμή

(4.2.4) $$\overline{KM} = \frac{1}{2}(\overline{K\Lambda} + \overline{KN})$$

(4.2.5) $$\overline{KM} = \frac{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|}$$

(4.2.6) $$\overline{K\Lambda} = \frac{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \mathbf{x}_A}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|}$$

(4.2.7) $$\overline{KN} = \frac{(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B|}$$

Από τις σχέσεις (4.2.4) έως (4.2.7) συνεπάγεται ότι

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \cdot \mathbf{x}_A + (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \cdot \mathbf{x}_B)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A^T \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B\right] \Rightarrow (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)^T \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}\left[\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B\right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

Άρα στην εξίσωση την (ε) $\rightarrow d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_3 = 0$

(4.2.9) $\mathbf{w} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$ και $w_3 = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $\mathbf{x}_A = [0,1]^T$, $\mathbf{x}_B = [2,3]^T$. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα άκρα των $\vec{x}_A$, $\vec{x}_B$ ανυσμάτων είναι

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_3 = 0 \quad \text{όπου} \\
&\mathbf{w} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B = [0,1]^T - [2,3]^T = [-2,-2]^T \\
&w_3 = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B\right) = -\frac{1}{2}\left(|0,1|\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} - [2,3]\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\left((0\cdot 0 + 1\cdot 1) - (2\cdot 2 + 3\cdot 3)\right) = -\frac{1}{2}(1-(4+9)) = 6
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

Άρα η ευθεία (ε) δίνεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
&(\varepsilon) \rightarrow d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T x + w_3 = 0 \Rightarrow \\
&(\varepsilon) \rightarrow \begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + 6 = 0 \Rightarrow \\
&(\varepsilon) \rightarrow |-2,-2| \begin{vmatrix}x_1\\x_2\end{vmatrix} + 6 = 0 \Rightarrow \\
&(\varepsilon) \rightarrow -2x_1 - 2x_2 + 6 = 0 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow x_1 + x_2 - 3 = 0
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

Τα προηγούμενα μπορούν να επεκταθούν και σε περισσότερα των 2 διαστάσεων. Αν τα μετρούμενα χαρακτηριστικά είναι τρία τότε η σχέση

(4.2.12) $d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_4 = 0$

περιγράφει ένα επίπεδο που χωρίζει τον E^3 σε δύο μέρη d(x)>0 και d(x)<0.

Στην περίπτωση των N διαστάσεων οι σχέσεις (4.2.10) γίνονται

(4.2.13) $d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T\mathbf{x} + w_{N+1} = 0$

$$\mathbf{w} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B \quad \text{και} \quad w_{N+1} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B^T \cdot \mathbf{x}_B)$$

περιγράφει ένα υπερ-επίπεδο που χωρίζει τον

E^N σε δύο μέρη που ορίζονται από τις σχέσεις d(**x**)>0 και d(**x**)<0.

4.2.1. Επαυξημένα διανύσματα

Αν $w = [w_1, w_2, w_3]^T$ και $\tilde{x} = [x_1, x_2, 1]^T$ τότε η σχέση (4.2.1.1) γράφεται

(4.2.1.1) $d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}}$

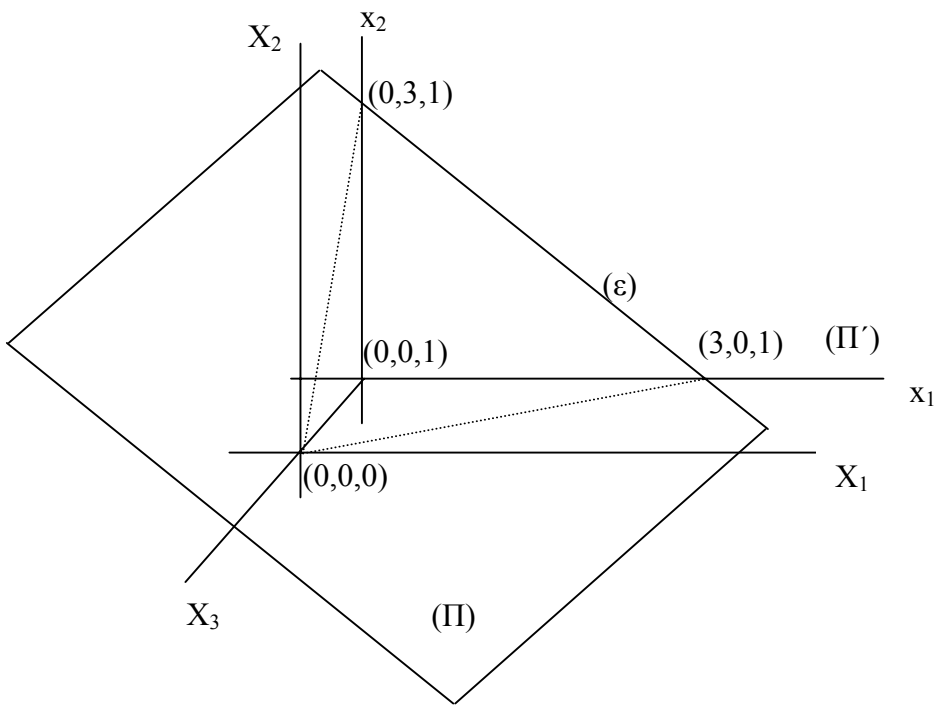
Ο πίνακας $\tilde{\mathbf{x}}$ λέγεται επαυξημένος του **x** και η ευθεία (ε) δίνεται από την σχέση

(4.2.1.2) $\mathbf{w}^T \cdot \tilde{\mathbf{x}} = 0$

Στην περίπτωση N χαρακτηριστικών η σχέση $d(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x} = 0$, με $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_{N+1}]^T$ περιγράφει ένα υπερεπίπεδο (Π) σε έναν N+1 διαστάσεων χώρο που διέρχεται από το κέντρο των αξόνων και περιέχει την (ε). Όλα τα ανύσματα των προτύπων ανήκουν στο επίπεδο (Π΄) που είναι κάθετο στον N+1 άξονα και τον τέμνει στην τιμή ένα.

Στο Σχ.4.2.1-1 φαίνεται η ευθεία της σχέσης (4.2.9) του προηγούμενου παραδείγματος σχεδιασμένη στο επίπεδο του E^2 με άξονες τους x_1, x_2 και η τοποθέτηση του E^2 στον χώρο E^3 των επαυξημένων ανυσμάτων. Φαίνεται επίσης το επίπεδο (Π) του επαυξημένου χώρου που δίνεται από την σχέση

(4.2.1.3) $\mathbf{w}^T \cdot \mathbf{x} = 0$



Σχήμα 4.2.1-1