3. Βασικά μαθηματικά μεγέθη, συμβολισμοί και σχέσεις

3.1. Πίνακας στήλης

Αν Κ το πλήθος των προτύπων , Ν το πλήθος των χαρακτηριστικών που μετράμε σε κάθε πρότυπο και Τ το πλήθος των τάξεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα δείκτη κ=1,2,...,Κ για κάθε πρότυπο, ένα δείκτη ν=1,2,...,Ν για κάθε χαρακτηριστικό και ένα δείκτη τ=1,2,...,Τ για κάθε κλάση. Ο διανυσματικός χώρος των προτύπων έχει διάσταση Ν (π.χ. E^N). Για την τιμή του *ν* χαρακτηριστικού του *κ* προτύπου που ανήκει στην κλάση *τ* γράφουμε

$$x_{\nu\kappa}^{\tau} .$$

Συχνά κάποιοι δείκτες δεν χρησιμοποιούνται όταν έχουν προφανή τιμή ή όταν η αναφορά τους δεν είναι απαραίτητη.

Η μαθηματική περιγραφή των πραγμάτων στην αναγνώριση προτύπων γίνεται με την χρήση όρων της γραμμικής άλγεβρας. Το διάνυσμα $\vec{x}$ που περιέχει Ν χαρακτηριστικά ενός προτύπου θα θεωρείται πίνακας με Ν γραμμές και μία στήλη και θα συμβολίζεται $\mathbf{x}_{Nx1}$ ή χάριν συντομίας **x.** Τα ονόματα όλων των πινάκων θα γράφονται με παχείς χαρακτήρες. Συχνά θα χρησιμοποιούμε τον ανάστροφο πίνακα $\mathbf{A}^T$ ενός πίνακα **A** (Παράρτημα Α). Όπου ενδείκνυται για εξοικονόμηση χώρου τον πίνακα στήλης **x** ενός προτύπου θα τον γράφουμε ως πίνακα γραμμής $\mathbf{x}^T=[\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_\nu,\ ...,x_N]$. Με βάση τον ορισμό του πολλαπλασιασμού δύο πινάκων (Παράρτημα Α) η Ευκλείδια απόσταση $d_E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ των πινάκων στήλης **x**, **y** δύο προτύπων Π_x, Π_υ δίνεται από την σχέση

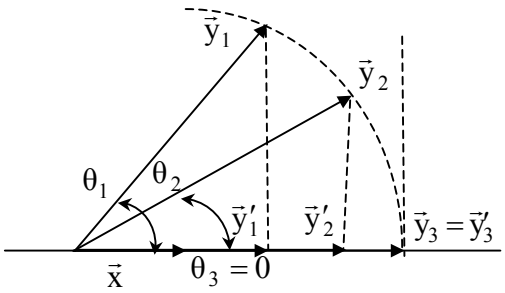
(3.1.1) $d_E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{1/2}$

3.2. Εσωτερικό γινόμενο

Αν δύο πρότυπα Π_x και Π_y περιγράφονται διανυσματικά από τα διανύσματα $\vec{x}(x_1, x_2,\ldots,x_\nu,\ldots,x_N)$ και $\vec{y}(y_1, y_2,\ldots,y_\nu,\ldots,y_N)$ ή αντίστοιχα από τους πίνακες $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots,x_\nu,\ldots,x_N]^T$, και $\mathbf{y} = [y_1, y_2,\ldots,y_\nu,\ldots,y_N]^T$, όπου N το πλήθος των χαρακτηριστικών τους , το εσωτερικό γινόμενό τους ορίζεται από τη σχέση

(3.2.1) $$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \ldots + x_\nu\cdot y_\nu + \ldots x_N\cdot y_N = \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu\cdot y_\nu = \mathbf{x}^T\cdot\mathbf{y}$$

Αν το διάνυσμα $\vec{x}$ έχει μέτρο (μήκος) ίσο με τη μονάδα, το γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y}$ είναι η αλγεβρική τιμή της προβολής $\vec{y}'$ του $\vec{y}$ επάνω στην ευθεία που διέρχεται από το διάνυσμα $\vec{x}$ (φορέας του $\vec{x}$). Όταν η γωνία θ των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ μικραίνει το εσωτερικό τους γινόμενο $\vec{x}\cdot\vec{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ αυξάνει και μεγιστοποιείται όταν τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έχουν την ίδια φορά (Σχ.3.2-1).



Σχήμα 3.2-1

Αυτό σημαίνει ότι τότε ισχύει η σχέση

(3.2.2) $$\vec{y} = \lambda\cdot\vec{x},\ \mathbf{y} = \lambda\cdot\mathbf{x} \text{ όπου } \lambda\in R \text{ και } \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots\frac{y_\nu}{x_\nu} = \cdots\frac{y_N}{x_N} = \lambda$$

Υπό αυτές ένας συνθήκες το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο ομοιότητας (όχι υποχρεωτικά ισότητας) δύο προτύπων. Παροτρύνεται ο αναγνώστης να εφαρμόσει τα παραπάνω στον «κόσμο» των

τριγώνων όπου κάθε τρίγωνο περιγράφεται διανυσματικά στον τρισδιάστατο χώρο με συντεταγμένες τα μήκη των πλευρών του. Υπενθυμίζεται ότι κριτήριο ισότητας δύο προτύπων είναι η απόστασή ένας $d(\vec{x},\vec{y})=0$.

3.3. Στατιστικά χαρακτηριστικά του χώρου των προτύπων

Για ένα πλήθος Κ προτύπων που περιγράφονται σε ένα χώρο με Ν διαστάσεις η μέση τιμή μ είναι ένας πίνακας-στήλης που ορίζεται από τη σχέση

(3.3.1) $$\mu=\frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}x_k=[\mu_1,\mu_2,...,\mu_\nu...\mu_N]^T \text{ όπου } \mu_\nu=\frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}x_{\nu\kappa}$$

Η μέση τιμή **μ** αναφέρεται και ως η μαθηματική προσδοκία Ε(**x**) όπου **x** μεταβλητή για τους πίνακες-στήλης των προτύπων. Αν υπάρχουν λ πρότυπα που οι τιμές των πινάκων-στήλης τους είναι ίσες, λαμβάνονται υπόψη λ φορές στο άθροισμα της (3.3.1) και ως εκ τούτου δεν χρησιμοποιείται στον τύπο (3.3.1) η συνάρτηση συχνότητας εμφάνισης f(**x**) κάθε τιμής της μεταβλητής **x**. Οι τιμές μ_ν όπου ν=1…Ν ορίζουν το μέσο διάνυσμα $\vec{\mu}$ των Κ προτύπων στο Ν-διάστατο χώρο τους. Ο πίνακας συμμεταβλητότητας ή πίνακας συνδιασποράς $C_{o\nu}$ ορίζεται από τη σχέση

(3.3.2)

$$C_{o\nu}=\frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}(x_k-\mu)\cdot(x_k-\mu)^T=\frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}\begin{vmatrix}x_{1\kappa}-\mu_1\\x_{2\kappa}-\mu_2\\\vdots\\x_{\nu\kappa}-\mu_\nu\\\vdots\\x_{\kappa N}-\mu_N\end{vmatrix}\cdot[x_{1\kappa}-\mu_1,x_{2\kappa}-\mu_2,...,x_{\nu\kappa}-\mu_\kappa,...x_{N\kappa}-\mu_N]=$$

$$\frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}\begin{vmatrix}(x_{1\kappa}-\mu_1)^2 & (x_{1\kappa}-\mu_1)\cdot(x_{2\kappa}-\mu_2) & \cdots & (x_{1\kappa}-\mu_1)\cdot(x_{\nu\kappa}-\mu_\nu) & \cdots & (x_{1\kappa}-\mu_1)\cdot(x_{N\kappa}-\mu_N)\\(x_{2\kappa}-\mu_2)\cdot(x_{1\kappa}-\mu_1) & (x_{2\kappa}-\mu_2)^2 & \cdots & (x_{2\kappa}-\mu_2)\cdot(x_{\nu\kappa}-\mu_\nu) & \cdots & (x_{2\kappa}-\mu_2)\cdot(x_{N\kappa}-\mu_N)\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\(x_{\lambda\kappa}-\mu_\lambda)\cdot(x_{1\kappa}-\mu_1) & (x_{\lambda\kappa}-\mu_\lambda)\cdot(x_{2\kappa}-\mu_2) & \cdots & (x_{\lambda\kappa}-\mu_\lambda)\cdot(x_{\nu\kappa}-\mu_\nu) & \cdots & (x_{\lambda\kappa}-\mu_\lambda)\cdot(x_{N\kappa}-\mu_N)\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\(x_{N\kappa}-\mu_N)\cdot(x_{1\kappa}-\mu_1) & (x_{N\kappa}-\mu_N)\cdot(x_{2\kappa}-\mu_2) & \cdots & (x_{N\kappa}-\mu_N)\cdot(x_{\nu\kappa}-\mu_\nu) & \cdots & (x_{N\kappa}-\mu_N)^2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1\nu} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2\nu} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{\lambda 1} & \sigma_{\lambda 2} & \cdots & \sigma_{\lambda\nu} & \cdots & \sigma_{\lambda N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{N\nu} & \cdots & \sigma_N^2 \end{vmatrix} = E(\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\,(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\,)$$

όπου $\sigma_{\lambda\nu} = \frac{1}{K}\sum_{\kappa=1}^{K}(x_{\lambda\kappa} - \mu_\lambda)\cdot(x_{\nu\kappa} - \mu_\nu)$

Η ποσότητα σ_ν^2 είναι η μεταβλητότητα ή διασπορά (variance) των μετρήσεων του ν-οστού χαρακτηριστικού των προτύπων. Η ποσότητα $\sigma_{\lambda\nu}=\sigma_{\nu\lambda}$ λέγεται συμμεταβλητότητα ή συνδιασπορά των τιμών των λ και ν χαρακτηριστικών των προτύπων και χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης $P_{\lambda\nu}$ δύο χαρακτηριστικών μ,ν σύμφωνα με τη σχέση

(3.3.3) $$P_{\lambda\nu} = \frac{\sigma_{\lambda\nu}}{\sigma_\lambda \cdot \sigma_\nu}$$

Η ποσότητα $\sigma_\nu = \sqrt{\sigma_\nu^{\,2}}$ λέγεται τυπική απόκλιση. Οι παραπάνω ποσότητες χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση και ανάλυση των μετρούμενων χαρακτηριστικών.

3.4. Αποστάσεις

Εκτός από την Ευκλείδεια απόσταση υπάρχουν και άλλοι τύποι αποστάσεων σε διανυσματικούς χώρους. Για να θεωρηθεί απόσταση μια σχέση $d(\vec{x},\vec{y})$ θα πρέπει για οποιοδήποτε διάνυσμα x, y, z να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

(3.4.1) $$\begin{aligned} & d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x}) \\ & d(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y}) \\ & d(\vec{x},\vec{y}) \ge 0 \\ & \text{Αν } d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y} \end{aligned}$$

Συνήθεις τύποι αποστάσεων είναι οι παρακάτω:

α) Minkowski τάξης s

(3.4.2) $$d_\mu(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N}\left|x_\nu - y_\nu\right|^s\right]^{1/s}$$

β) City Block

Είναι ειδική περίπτωση της Minkowski με s=1

(3.4.3) $$d_c(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{\nu=1}^{N} |x_\nu - y_\nu|$$

γ) Ευκλείδεια

Είναι ειδική περίπτωση της Minkowski για s=2

(3.4.4) $$d_\varepsilon(\vec{x},\vec{y}) = \left[\sum_{\nu=1}^{N} (x_\nu - y_\nu)^2\right]^{1/2} = [(\mathbf{x}-\mathbf{y})^T \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})]^{1/2}$$

δ) Chebychev

(3.4.5) $$d_T(\vec{x},\vec{y}) = \max(|x_\nu - y_\nu|)$$

ε) Mahalanobis

(3.4.6) $$d_R(\vec{x},\vec{y}) = d_R(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}-\mathbf{y})^T \cdot \mathrm{Cov}^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

όπου Cov ο πίνακας συμμεταβλητότητάς των **x** και **y**.

στ) Μη γραμμική (Non Linear)

(3.4.7)

$$d_{NL}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{cases} O \text{ αν } d(x,y) \le T \\ H \text{ αν } d(x,y) > T \end{cases}$$

όπου $H, T \in R$ παράμετροι της απόστασης και $d(\vec{x},\vec{y})$ μια άλλη απόσταση του χώρου.